ＭＢ　関数解析学　線形作用素の理論　講義報告[2]

２００８年5月２４日（土）　１４：００－１６：００

前回に引き続き、有限次元のノルム空間のノルムが全て同値になることを証明した。この定理の重要性から、講義で行なった証明と別証を載せた。次に、Norm空間 の有限次元の線形部分空間が Banach空間 になることを示した。

定理 1.3. 有限次元のノルム空間 V のノルムは全て同値である。

証明. $\mathfrak{B}^* = \{b_1^*, b_2^*, \cdots, b_n^*\}$ を V の基底 $\mathfrak{B} = \{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ の双対基底とするとき、

$$\langle v, w\rangle_{\mathfrak{B}} = \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu^*(v) b_\nu^*(w)$$

は V 上の内積になる。このとき、ノルム $\eta_{\mathfrak{B}}(v) = \sqrt{\langle v, v\rangle_{\mathfrak{B}}}$ が V の任意のノルム $\|\ \|$ と同値であることを示す。

イ）. 任意の $v \in V$ に対して、$\|v\| \leq \beta \eta_{\mathfrak{B}}(v)$ なる $\beta > 0$ が存在すること。

$$\begin{aligned}\|v\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} \langle v, b_i\rangle_{\mathfrak{B}}\, b_i \right\| &\leq \sum_{i=1}^{n} |\langle v, b_i\rangle_{\mathfrak{B}}|\, \|b_i\| \leq \sum_{i=1}^{n} \eta_{\mathfrak{B}}(v)\eta_{\mathfrak{B}}(b_i)\, \|b_i\| \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{n} \eta_{\mathfrak{B}}(b_i)\, \|b_i\| \right) \eta_{\mathfrak{B}}(v)\end{aligned}$$

したがって、$\beta = \sum_{i=1}^{n} \eta_{\mathfrak{B}}(b_i)\, \|b_i\|$ とおけばいい。

ロ）. 任意の $v \in V$ に対して、$\eta_{\mathfrak{B}}(v) \leq \alpha \|v\|$ なる $\alpha > 0$ が存在すること。

$$D = \{v \in V \mid \eta_{\mathfrak{B}}(v) \leq 1\} \quad \Delta = \{v \in V \mid \|v\| \leq 1\}$$

とおいたときに、$\Delta \subset \alpha D$ なる $\alpha > 0$ が存在することを示す。もし、$\Delta \subset \alpha D$ なる $\alpha > 0$ が存在しないと仮定すれば、$\eta_{\mathfrak{B}}-$ ノルムで有界でない点列 $\varphi : \mathbb{N} \to \Delta$ が存在する。（すなわち、$\eta_{\mathfrak{B}}(\varphi(\nu)) \to \infty\ (n \to \infty)$）
∂D は点列コンパクトだから、点列 $\left\{ \dfrac{\varphi(\nu)}{\eta_{\mathfrak{B}}(\varphi(\nu))} \right\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subset \partial D$ は、収束部分列を含む。すなわち、

$$\exists c \in \partial D \quad \text{such that} \quad \lim_{\nu \to \infty} \left(\frac{(\varphi \circ \tau)(\nu)}{\eta_{\mathfrak{B}}((\varphi \circ \tau)(\nu))} \right) = c$$

ただし、$\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ は狭義単調増加列とする。

$$\therefore \quad \lim_{\nu \to \infty} \eta_{\mathfrak{B}} \left(\left(\frac{(\varphi \circ \tau)(\nu)}{\eta_{\mathfrak{B}}((\varphi \circ \tau)(\nu))} \right) - c \right) = 0$$

よって、イ）により、

$$\left\| \left(\frac{(\varphi \circ \tau)(\nu)}{\eta_{\mathfrak{B}}((\varphi \circ \tau)(\nu))} \right) - c \right\| \leq \beta \eta_{\mathfrak{B}} \left(\left(\frac{(\varphi \circ \tau)(\nu)}{\eta_{\mathfrak{B}}((\varphi \circ \tau)(\nu))} \right) - c \right) \to 0\ (\nu \to \infty)$$

一方、

$$\left\| \frac{(\varphi \circ \tau)(\nu)}{\eta_{\mathfrak{B}}((\varphi \circ \tau)(\nu))} \right\| = \frac{\|(\varphi \circ \tau)(\nu)\|}{\eta_{\mathfrak{B}}((\varphi \circ \tau)(\nu))} \leq \frac{1}{\eta_{\mathfrak{B}}((\varphi \circ \tau)(\nu))} \to 0\ (\nu \to \infty)$$

故に、$c = 0$ となり、$c \in \partial D$ に矛盾する。 □

[2] 数学工房　http://www.sugakukobo.com/

別証. $\mathfrak{B}^* = \{b_1^*, b_2^*, \cdots, b_n^*\}$ を V の基底 $\mathfrak{B} = \{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ の双対基底とするとき、

$$\langle v, w \rangle_{\mathfrak{B}} = \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu^*(v) b_\nu^*(w)$$

は V 上の内積になる。このとき、ノルム $\eta_{\mathfrak{B}}(v) = \sqrt{\langle v, v \rangle_{\mathfrak{B}}}$ が V の任意のノルム η と同値であることを示す。

$$\eta(u) = \eta\left(\sum_{j=1}^{n} b_j^*(u) b_j\right) \leq \sum_{j=1}^{n} |\langle u, b_j \rangle_{\mathfrak{B}}| \eta(b_j) \leq \left(\sum_{j=1}^{n} \eta(b_j)\right) \eta_{\mathfrak{B}}(u) \quad \text{for } \forall u \in V$$

この不等式から、η は、$\eta_{\mathfrak{B}}-$ ノルムに関して、一様連続であることがわかる。また、

$$\partial B_1 = \{u \in V \mid \eta_{\mathfrak{B}}(u) = 1\}$$

は $\eta_{\mathfrak{B}}-$ コンパクトだから、「$Weierstra\beta$ の定理」により、$m = \min\{\eta(u) \mid u \in \partial B_1\},\ M = \max\{\eta(u) \mid u \in \partial B_1\}$ なる $m, M \in \mathbb{R}$ が存在して、

$$m \leq \eta(u) \leq M \quad \text{for } \forall u \in V$$

（ここで、$m = \eta(u_0)$ なる $u_0 \in \partial B_1$ が存在するから、$m > 0$ となることに注意する。）
したがって、$\forall u \in V \setminus \{0_V\}$ に対して、

$$m \leq \eta\left(\frac{u}{\eta_{\mathfrak{B}}(u)}\right) \leq M$$

$$\therefore \quad m\eta_{\mathfrak{B}}(u) \leq \eta(u) \leq M\eta_{\mathfrak{B}}(u)$$

この不等式は $u = 0_V$ についても成立する。故に、二つのノルム $\eta_{\mathfrak{B}},\ \eta$ は同値である。 □

練習問題 1.2. V を有限次元の線型空間とするとき、

1. $\mathfrak{B}^* = \{b_1^*, b_2^*, \cdots, b_n^*\}$ を V の基底 $\mathfrak{B} = \{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ の双対基底とするとき、

$$\langle v, w \rangle_{\mathfrak{B}} = \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu^*(v) b_\nu^*(w)$$

は V 上の内積になることを示せ。

2.

$$\partial B_1^*(0) = \left\{v \in V \mid \sum_{\nu=1}^{n} |b_\nu^*(v)|^2 = 1\right\}$$

とおけば、$\partial B_1^*(0) \subset V$ は点列コンパクトになることを示せ。

定理 1.4. $(V, \|\ \|)$ を $Norm$空間 とする。$M \subset V$ を V の有限次元の線形部分空間とするとき、M は $Banach$ 空間 になる。特に、ノルム $\|\ \|$ より導かれる位相に関して、M は閉集合である。

記録 by J.S